Pauta Prueba N°1

1. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine A^n y B^n, si n es un entero positivo, y verifique que

   $$2A^n - B^n = I_2.$$

   Sugerencia: Calcule A^n y B^n para $n = 1, 2, 3$ y 4. Luego, generalice para cualquier n.

   (b) Encuentre la inversa de $(A + B)$. Use lo anterior para resolver la ecuación

   $$A\mathbf{x} = \mathbf{b} - B\mathbf{x}$$

Solución:

Considerando $n = 2, 3, 4$, obtenemos:

$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Respectivamente,

$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B^3 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B^4 = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. (**3 puntos**)

En general,

$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. (**3 puntos**)

Luego,

$2A^n - B^n = \begin{bmatrix} 2 & 2n \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.(**4 puntos**).

Para la parte b), tenemos que $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Luego, $(A + B)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.
(**5 puntos**).

La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b} - B\mathbf{x}$ es equivalente a $(A + B)\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
Luego, multiplicando por $(A + B)^{-1}$, obtenemos :

$$\mathbf{x} = (A + B)^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}. \text{ (}\mathbf{5\ puntos}\text{)}$$

2. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & k \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & k & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ k+1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule $|A|$. Con lo anterior, determine los valores de k para los cuales A es invertible.

(b) Considere el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Determinar el o los valores de k para que el sistema:

   i. Tenga solución única.

   ii. Tenga infinitas soluciones.

   iii. No tenga solución.

(c) Resolver el sistema para $k = 1$.

Solución:
Para la parte a), calculamos $|A|$.

Usando la regla de Sarrus obtenemos que :

$$\begin{aligned} |A| &= \left|\begin{matrix} 1 & 2 & k \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & k & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 1 & k \end{matrix} \\ &= 10 + 2 + 2k^2 - (5k + k + 8) \\ &= 2(k-2)(k-1). \end{aligned}$$

Usando operaciones elementales:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & k & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 0 & 1 & (1-2k) \\ 0 & (k-2) & (2-k) \end{vmatrix} \\ &= 2 - k - (k-2)(1-2k) \\ &= 2(k-2)(k-1). (\mathbf{5\ puntos}). \end{aligned}$$

Luego, como $|A| = 2(k-2)(k-1)$, la matriz A es invertible si y sólo sí $k \neq 2$ y $k \neq 1$. (**5 puntos**).

Para la parte b), tenemos dos soluciones:

- **Solución 1** .
  Usando la parte a), si $k \neq 2$ y $k \neq 1$ entoces A es invertible y por lo tanto el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.(**5 puntos**).

  Analizamos los otros casos:

  Si $k = 2$, la matriz ampliada asociada al sistema está dada por:

  $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

  Luego, como $\rho(A) < \rho(A|\mathbf{b})$, el sistema no tiene solución. (**5 puntos**).

  Si $k = 1$, tenemos que

  $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  Luego, $\rho(A) = \rho(A|\mathbf{b}) = 2 < 3 =$ número de variables, lo que implica que el sistema tiene infinitas soluciones.(**5 puntos**).

- **Solución 2** .

  Consideramos la matriz ampliada

  $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 2 & 5 & 1 & k \\ 1 & k & 2 & k+1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 0 & 1 & 1-2k & k-2 \\ 0 & 0 & 2(k-2)(k-1) & -(k-4)(k-1) \end{array}\right] (\textbf{8 puntos}).$$

  Luego, si $k \neq 1$ y $k \neq 2$, entonces $\rho(A) = \rho(A|\mathbf{b}) = 3 =$ número de variables y por lo tanto el sistema tiene solución única. Si $k = 1$, aplicando el mismo análisis hecho antes, el sistema tiene infinitas soluciones. Análogamente, si $k = 2$, el sistema es inconsistente.(**7 puntos**).

  Para la parte c), Si $k = 1$, tenemos que

  $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Luego, $x + 3z = 3$ y $y - z = -1$. Haciendo $z = t$ tenemos que la solución al sistema está dada por

$$\begin{aligned} x &= 3 - 3t \\ y &= -1 + t \\ z &= t \end{aligned}$$

donde t es cualquier número real.(**5 puntos**).

3. Se dispone de tres cajas A, B y C con monedas de 1 euro. Se sabe que en total hay 36 euros. El número de monedas de A excede en 2 a la suma de las monedas de las otras dos cajas. Si se traslada una moneda de la caja B a la caja A, ésta tendrá el doble de monedas de B. ¿Cuántas monedas había en cada caja?

   Solución:

   Definiendo:

$$\begin{aligned} x &= \text{número de monedas en la caja A} \\ y &= \text{número de monedas en la caja B} \\ z &= \text{número de monedas en la caja C} \end{aligned}$$

   tenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x &= y + z + 2 \\ x + 1 &= 2(y - 1) \end{aligned}\right|$$

   Por plantear bien el sistema ,**5 puntos**. (**1 punto** por la primera ecuación y **2 puntos** por cada una de las restantes).

   El sistema anterior es equivalente a

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 36 \\ x - y - z &= 2 \\ x - 2y &= -3 \end{aligned}\right|$$

   cuya matriz ampliada es

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 36 \\ 0 & 1 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right],$$

   lo que implica que $z = 6$ y por lo tanto $y = 11$ y $x = 19$. (**5 puntos**).